PLUS FORT !

1. ***a.*** $[8, 1, \mathbf{7}, 6, 5, 2, \mathbf{3}, \mathbf{4}]$ est une autre liste de longueur 8 et de score 3.
   b. Les listes de longueurs 3 sont $[1, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$, $[1, \mathbf{3}, 2]$, $[2,1, \mathbf{3}]$, $[2, \mathbf{3}, 1]$, $[3,1, \mathbf{2}]$, $[3,2,1]$ et les scores associés sont respectivement $2, 1, 1, 1, 1, 0$.

2.

```
def score(n):
   '''renvoie le score d'une liste L de longueur n'''
   S=0
   for k in range(n-1):
      if L[k+1]>L[k]:
         S=S+1
   return S
```

3. Le score est un nombre positif ou nul et le joueur marque 0 point avec la liste $[n, n-1, \dots, 2,1]$.
Dans le meilleur des cas, toutes les cartes sont dans l'ordre croissant et la liste $[1, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}]$ apporte le nombre maximal de points qui est $n-1$.

4. ***a.*** La liste $[1, \mathbf{2}, .., \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}, n-1, .., k+1]$ a pour score k et est de longueur n donc il existe au moins une liste de longueur n et de score k.
b. La liste $[n-1, .., k+1, 1, \mathbf{2}, .., \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}]$ est différente de la précédente et donne aussi k points donc, pour tout k entre 1 et $n-2$, on peut trouver deux listes de longueur n et de score k.

5. La première liste donnée dans la question **2**. est la seule de longueur n et de score 0 (les nombres doivent tous être rangés dans l'ordre décroissant. De même, la deuxième liste donnée dans la question **2**. est la seule de longueur n et de score $n-1$, donc $L_n(0) = L_n(n-1) = 1$.

6. ***a.*** En appliquant le résulta de la question précédente à $n = 3$, $L_3(0) = L_3(2) = 1$.
Les listes de longueurs 3 sont $[1, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$, $[1, \mathbf{3}, 2]$, $[2,1, \mathbf{3}]$, $[2, \mathbf{3}, 1]$, $[3,1, \mathbf{2}]$, $[3,2,1]$ et on en déduit $L_3(1) = 4$.
On remarque que $[3,1, \mathbf{2}]$ rapporte 1 point. Parmi les 4 possibilités d'insertion du 4, les listes dont le score est toujours 1 sont $[\mathbf{4}, 3,1,2]$ et $[3,1, \mathbf{4}, 2]$.
b. La liste $[3,2,1]$ a pour score 0. On obtient une liste ayant encore le score 0 uniquement en insérant le n°4 au début, ce qui donne la liste $[\mathbf{4}, 3,2,1]$.
c. Toute liste de longueur 4 et de score 1 ne peut être obtenue que par insertion du n°4 dans une liste de longueur 3 et de score 0 ou 1. En effet, insérer 4 à la liste $[\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$ donnera une liste de score 2 au moins.
Pour chaque liste de longueur 3 et score 1, il y a deux possibilités d'insertion du n°4, ce qui fait $2\ L_3(1)$ telles listes possibles.
À cela on ajoute les 3 possibilités obtenues à partir de la liste de longueur 3 et score 0, ce qui ajoute $3\ \boldsymbol{L_3}(0)$ listes possibles.
On obtient donc bien $L_4(1) = 2L_3(1) + L_3(0)$.
d. On construit une liste de longueur $n+1$ et score 1 à partir d'une liste de longueur n et score 0 ou 1, en insérant le n° $n+1$ judicieusement.
Remarquons d'abord que la position 1 ne rapporte pas de point.
Dans une liste de longueur n et score 1, on peut insérer le n° $n+1$ soit au tout début (en position 1), soit juste avant le numéro marquant l'unique point (position au moins 2). Ces deux positions sont distinctes, et ce sont les seules possibles, ce qui fait $2\ \boldsymbol{L_n}(1)$ listes de ce type.

Dans une liste de longueur n et de score 0, on peut insérer le n° $n+1$ n'importe où sauf au tout début, la liste obtenue rapportera bien 1 point. Il y a donc n positions possibles pour ce numéro $n+1$, ce qui fait $n\, L_n(0)$ listes de ce type.
Enfin, insérer $n+1$ à une liste de longueur n et de score supérieur ou égal à 2 donnera une liste de score supérieur ou égal à 2 : en effet, si on l'insère en queue, cela augmentera le score d'une unité, et sinon, cela conservera le score initial.
On trouve donc bien $L_{n+1}(1) \ = 2L_n(1) + nL_n(0)$.

e. On a $L_{n+1}(k) = (k+1)L_n(k) + (n+1-k)L_n(k-1)$. En effet :

- Si on insère le n° $n+1$ dans une liste de longueur n et score k, la nouvelle liste a encore un score de k si et seulement si l'insertion s'est faite en position 1, ou juste avant un numéro qui marquait un point, ce qui fait $k+1$ possibilités.
- Si on insère le n° $n+1$ dans une liste de longueur n et score $k-1$, la nouvelle liste a un score de k si et seulement si l'insertion s'est faite dans l'une des positions non évoquées ci-dessus, ce qui donne $n+1-k$ possibilités.
- Enfin, comme précédemment, insérer $n+1$ à une liste de score strictement inférieur à $k-1$, ou strictement supérieur à k, ne conduira jamais à une nouvelle liste de score k.

f. On obtient, grâce aux questions précédentes :

	$\boldsymbol{k=0}$	$\boldsymbol{k=1}$	$\boldsymbol{k=2}$	$\boldsymbol{k=3}$	$\boldsymbol{k=4}$
$\boldsymbol{n=3}$	1	4	1		
$\boldsymbol{n=4}$	1	11	11	1	
$\boldsymbol{n=5}$	1	26	66	26	1